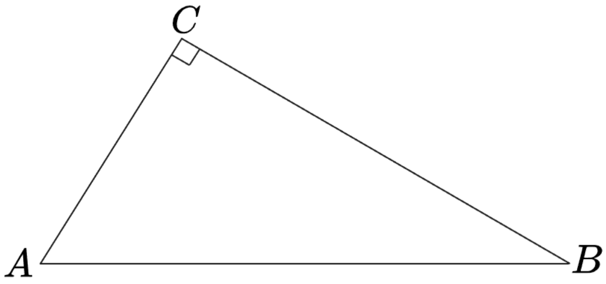
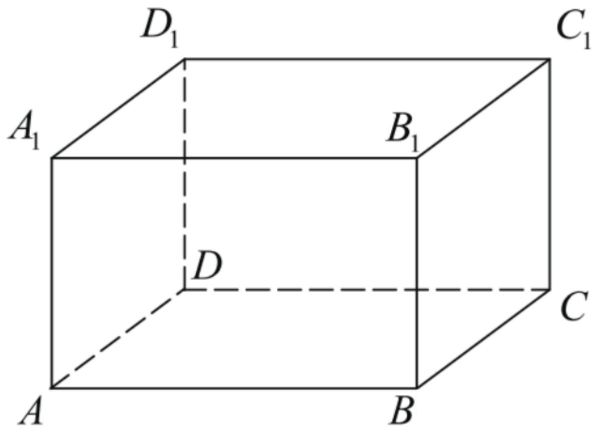
Недельный вариант ЕГЭ по математике № 3

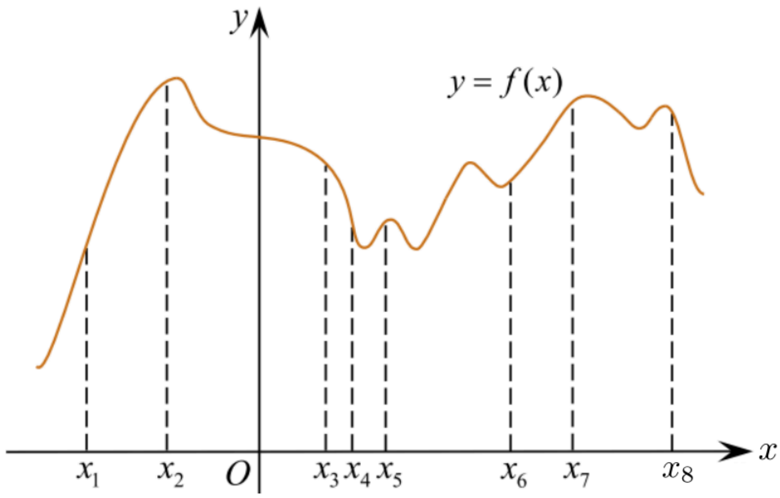
1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 45$, $\sin\alpha = 0{,}6$. Найдите BC.



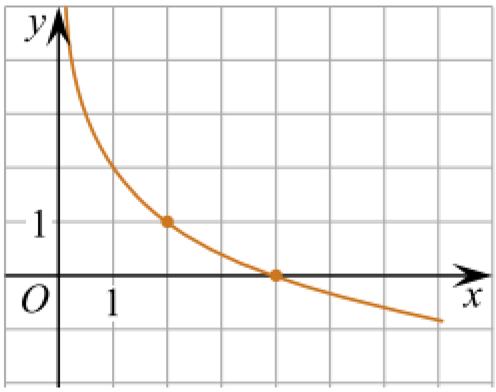
2. Даны векторы $\vec{a}(25; 0)$, $\vec{d}(1; -5)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 4\vec{d}$.
3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, A_1, B_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 5, AD = 10, AA_1 = 9$.



4. При производстве в среднем на каждые 2982 исправных насоса приходится 18 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.
5. Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна $0,6$. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{57 - 7x} = 6$
7. Найдите значение выражения $\frac{4^{5,1}}{8^{2,4}}$
8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



9. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 447 МГц. Скорость погружения батискафа вычисляется по формуле $v = c\frac{f-f_0}{f+f_0}$ где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0— частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 10 м/с.
10. Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие три часа — со скоростью 45 км/ч, а затем два часа — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
11. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+289}{x}$.
13. а) Решите уравнение $\log_2(x^2 + 2x) = 3$.

    б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0{,}1; \log_3 13]$.
14. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Плоскости (AOB) и (BOC) — прямоугольники, и стороны AB и CD являются их меньшими сторонами. AB и BC в 2 раза меньше соответственных больших сторон сечений.

    а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

    б) Найдите угол между CA_1 и (BOC).
15. Решите неравенство

$$\frac{117 - 15 \cdot 3^x}{9^x - 36 \cdot 3^x + 243} \geqslant 0.5$$

16. Зависимость количества Q (в шт., $0 \leqslant Q \leqslant 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?
17. Дан ромб $ABCD$. На диагонали AC отмечены точки M и N, так что $AM = NM = NC$. Прямая BM пересекает сторону AD в точке P, а прямая BN пересекает сторону CD в точке Q.
а) Докажите, что площадь четырехугольника $BPDQ$ равна площади треугольника ADC.
б) Найдите BD, если известно, что и около пятиугольника $PMNQD$ можно описать окружность.
18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0. \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.
19. На доске написано 24 числа: восемь «5», восемь «4» и восемь «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)
а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.
б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 12 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.
в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.